

# Elasticidad

Dra. C. ZARAGOZA

*Con esta lección se terminan los Fundamentos Básicos de Física Médica de interés para traumatólogos y ortopédicos, de la profesora titular de la disciplina Dra. ZARAGOZA RUBIRA\* que se han venido publicando en los números precedentes de esta revista.*

## I. Sólidos deformables. Elasticidad

En la mecánica clásica, una fuerza aplicada a un sólido da lugar a una aceleración o un giro. Realmente, una fuerza puede originar un tercer efecto: la deformación del sólido. Este fenómeno no tiene cabida dentro de la mecánica clásica, que considera únicamente sólidos ideales; éstos, por definición, no cambian de forma. La parte de la mecánica que se ocupa de los cuerpos (sólidos o fluidos) reales se conoce con el nombre de Mecánica Física, como oposición a la mecánica clásica o matemática.

Los cuerpos sólidos están formados, a nivel atómico, por estructuras cristalinas estables. Cuando aplicamos una fuerza externa modificamos la estructura de la red, desplazando sus elementos (átomos, iones o moléculas) de la posición de equilibrio. El sistema reaccionará tendiendo a ocupar la posición estable; esto es, oponiendo una fuerza igual y opuesta a la externa. Esta fuerza, que se presenta en el interior de los cuerpos como reacción a una fuerza deformadora externa, es lo que se denomina fuerza elástica, y se dice que un material es muy elástico cuando es capaz de desarrollar grandes fuerzas elásticas sin romperse; lo que es lo mismo, mantiene su forma primitiva incluso cuando la fuerza aplicada es muy grande. Esta definición de material elástico es distinta de la acepción usual de la palabra «elástico»: hablamos de un material elástico como de

aquél que es capaz de experimentar grandes deformaciones (por ejemplo, el caucho o el plástico) mientras que en Física, un material es elástico cuando no se deforma (por ejemplo, el acero o el vidrio).

Quedamos en que una fuerza aplicada a un sólido puede producir una deformación. Pero esta fuerza puede actuar de diversos modos, y a cada uno de ellos corresponderá un tipo de deformación. Por ejemplo, consideremos un cilindro sujeto por su base inferior, y veamos algunas de las deformaciones que puede experimentar:

1.- Si hacemos actuar sobre el cilindro una fuerza perpendicular a la base libre (figura 1), el cilindro experimentará una tracción si estiramos del cilindro o de una contracción si empujamos hacia el cilindro. El resultado principal será un alargamiento, en el primer caso, o un acortamiento en el segundo.

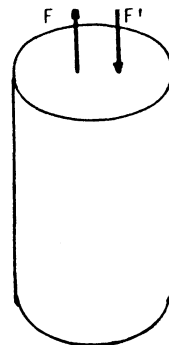


FIG. 1.- Tracción y contracción.

\* Profesora Titular.

2.- Si la fuerza actúa sobre la base libre del cilindro, pero tangencialmente a ella (fig. 2) se trata de un ensayo de elasticidad por cizalla. El resultado será un desplazamiento de la base libre del cilindro, con el consiguiente cambio de forma.

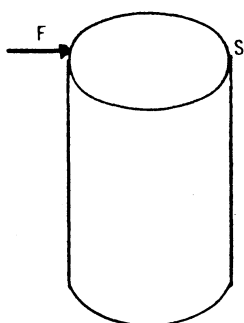


FIG. 2.- Cizalla.

3.- Si ejercemos un par de fuerzas sobre la base superior, el cilindro experimentará una torsión. Como resultado, la base superior girará ligeramente, manteniéndose fija la base inferior. La torsión es un tipo de cizalla modificado, en que la acción de una fuerza ha sido sustituida por la de un par (fig. 3).

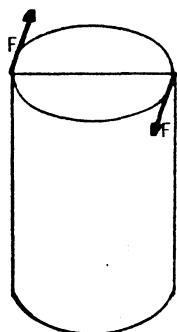


FIG. 3.- Torsión.

4.- Si sometemos el cilindro a la acción de una fuerza normal a toda su superficie, de modo que la intensidad de la fuerza por unidad de área sea constante (por ejemplo, sumergiéndolo en agua a gran profundidad), estamos efectuando un ensayo de compresión.

El resultado será una disminución en el volumen del cilindro, manteniéndose la forma (fig. 4).

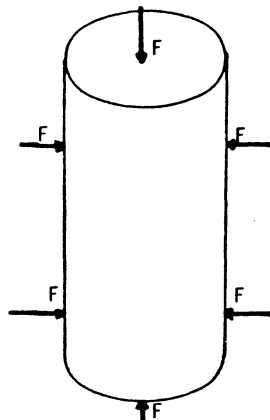


FIG. 4.- Compresión.

5.- Por último, podemos sujetar el cilindro por ambos extremos y ejercer una fuerza normal a la superficie lateral por el punto medio (fig. 5). Este es el caso, por ejemplo, de

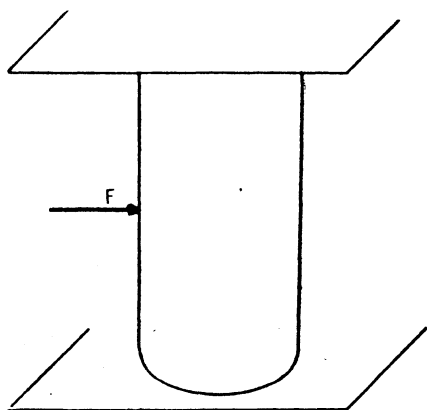


FIG. 5.- Flexión.

una estantería sobre la que se coloca un gran peso. Se trata de un ensayo de elasticidad por flexión, y el resultado será una deformación del cilindro, cuya generatriz pasa de ser una línea recta a estar curvada por su punto medio.

## II. Ley de Hooke

A cada tipo de ensayo elástico corresponde una deformación característica. Por ejemplo, en la tracción el cuerpo se alarga (aunque también se presenta una pequeña disminución del radio) y en la compresión disminuye de volumen manteniendo su forma. La ley de Hooke establece la proporcionalidad entre la deformación producida y la causa que ha originado esta deformación:

$$\text{Deformación} = K \cdot \text{Causa deformadora}$$

que no sólo indica que cuanto mayor sea la causa deformadora mayor será la deformación producida, sino además que existe una proporcionalidad directa entre ellas: a una causa doble corresponde una deformación doble, etc.

Esta ley se suele escribir en la forma:

Causa deformadora =  $(1/K)$  · Deformación siendo la constante  $1/K$  el módulo de elasticidad para el caso considerado. Cada cuerpo tendrá su módulo de tracción, de cizalla, de torsión, etc. El valor de los distintos módulos, para un cuerpo dado, no puede depender más que de la naturaleza del cuerpo y de sus dimensiones geométricas. Luego los distintos módulos elásticos no serán independientes entre sí. Se puede demostrar que todos ellos se pueden obtener a partir de dos de ellos.

Para ver la expresión concreta de la ley de Hooke en los distintos casos hemos de tener en cuenta que los diversos casos anteriormente considerados se pueden reducir a dos principales:

1) elasticidad por tracción o contracción (que incluye como casos especiales la compresión y flexión).

2) elasticidad por cizalla (que incluye como caso especial la torsión).

### 1.— Elasticidad por tracción o contracción

En este caso se ejerce una fuerza normal a la superficie por el extremo libre del cuerpo. Pero todo el cuerpo se estira (o se contrae) de modo uniforme, luego cada sección del cuerpo tira (u oprime) la parte adyacente de un modo uniforme. La causa deformadora será la fuerza ejercida por unidad de área: es lo que se denomina el esfuerzo (o fatiga) de tracción (o contracción). Podemos considerarlo desde otro punto de vista: una misma fuerza no será igualmente efectiva aplicada a un alambre delgado o a un cable grueso, ambos del mismo material. La deformación producida será un alargamiento (acortamiento en la contracción) que habrá que medir en valores relativos, ya que, siguiendo un ejemplo paralelo, un mismo alargamiento, en cm, no tiene el mismo significado referido a un cable de 10 cm o a uno de 10 m. Si bien el resultado principal de la tracción (contracción) es un alargamiento (acortamiento), también tiene lugar una disminución (aumento) del radio, con el consiguiente cambio de volumen. El módulo de tracción (contracción) se denomina módulo de Young, y su valor depende exclusivamente del material de que esté formado el cuerpo considerado. La ley de Hooke toma la forma:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$$

El módulo de Young,  $E$ , tendrá las mismas dimensiones y vendrá medido en las mismas unidades que  $F/S$ . Estas son, en el S.I. el  $N\ m^{-2}$ , si bien la unidad práctica en que se suele medir es el  $Kp/mm^2$ . El valor del módulo de Young para un material dado no tiene porqué ser el mismo para la tracción que para la contracción.

En la Tabla I figuran los valores del módulo de Young para diversos materiales. El valor que figura para los tendones, el cartílago, la goma y los vasos sanguíneos tiene un valor simplemente indicativo frente a los del

acero, huesos o madera, ya que los materiales anteriormente citados no cumplen la ley de Hooke.

TABLA I

Valores del módulo de Young para diversos materiales en  $N\ m^{-2}$

Acero .....	200	$\cdot 10^6$
Huesos largos .....	16	$\cdot 10^5$ (tracción)
		$9'4 \cdot 10^5$ (contracción)
Madera dura .....	1'1	$\cdot 10$
Tendones .....	2	$\cdot 10$
Cartilago .....	1'2	$\cdot 10$
Goma .....	2	$\cdot 10$

La compresión puede considerarse como una contracción tridimensional. La causa deformadora es una sobrepresión, que da lugar a una disminución relativa de volumen. El módulo de compresibilidad (también medido en unidades de presión) tiene valores muy elevados para sólidos, y un poco menores para líquidos. La ley de Hooke tomará la forma:

$$P = -Q \frac{\Delta V}{V}$$

La Tabla II presenta algunos valores del coeficiente de compresibilidad:

TABLA II

Valores del coeficiente de compresibilidad en  $N\ m^{-2}$

Alcohol etílico .....	0'09	$10^{10}$
Mercurio .....	2'5	$10^{10}$
Agua .....	0'22	$10^{10}$
Aluminio .....	7'0	$10^{10}$
Acero .....	16	$10^{10}$
Aire a 20° C .....	1'24	$10^5$
Tejido corporal a 37° C .....	0'26	$10^{10}$

El caso de la deformación por flexión es más complicado puesto que la resistencia de un objeto a doblarse, o su capacidad de doblarse sin romperse depende no sólo del material de que está construido y su sección transversal, como en el caso de la tracción, sino también de su forma y de cómo está

colocado. Consideremos, por ejemplo, una tabla de 1 m de longitud, apoyada por sus extremos. La deformación será distinta si se apoya por su cara ancha o por su parte estrecha (fig. 6).

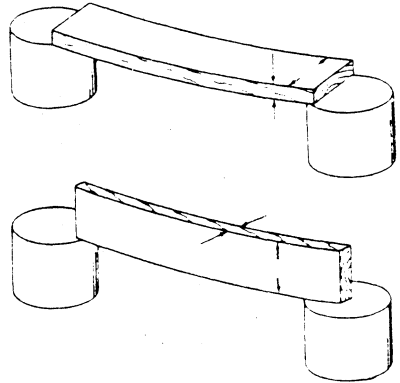


FIG. 6.- La flexión depende de la posición.

2.- Elasticidad por cizalla

En este caso, la fuerza aplicada es paralela a la superficie libre del cuerpo (fig. 7). Las fuerzas «cortantes», o tangenciales, provocan

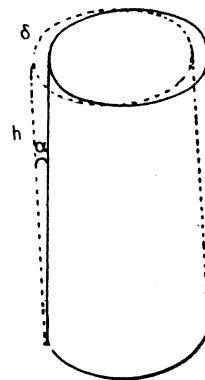


FIG. 7.- Resultado de la cizalla.

una deformación, que vendrá medida por el cociente entre el desplazamiento experimentado y la altura h. Si esta deformación es pequeña, se cumple:

$$\frac{\delta}{h} = \text{tg } \alpha \approx \alpha$$

El esfuerzo cortante será  $F_t/A$ , y el módulo correspondiente, también en unidades de presión, se llama módulo de cizalla ( $G$ ). La ley de Hooke toma la forma:

$$\frac{F_t}{S} = G \alpha$$

La Tabla III presenta los módulos de cizalla para diversos materiales:

TABLA III

Valores del módulo de cizalla  $G$  en  $N\ m^{-2}$

Aluminio .....	$2'4 \cdot 10^{10}$
Huesos largos .....	$\sim 10^{10}$
Madera dura .....	$\sim 10^{10}$
Acero .....	$8'4 \cdot 10^{10}$

Un caso especial de deformación por cizalla es aquel en que se aplica un momento dirigido según el eje del cilindro debido a un par de fuerzas: es el caso de la torsión. En este caso, una línea trazada sobre la superficie lateral del cilindro, originalmente paralela al eje, quedará distorsionada (fig. 8) ya que su

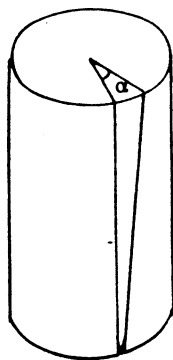


FIG. 8.—Resultado de la torsión.

extremo inferior, fijo, no se habrá desplazado, mientras que el superior, por efecto del par de fuerzas, habrá descrito un cierto ángulo. La relación entre el momento aplicado, y la deformación, medida por el ángulo  $\alpha$ , es más complicada que en el caso

simple de la cizalla, ya que hay que calcular el esfuerzo cortante y la deformación correspondientes a diversas distancias del eje cilindro.

Si un objeto se somete a un esfuerzo de torsión creciente llegará a romperse. No es necesario que sobre el objeto actúe una fuerza muy grande, sino que su momento sea suficientemente intenso. Por ejemplo, es frecuente el caso de la fractura en espiral de la tibia en los esquiadores: la tibia puede resistir sin romperse un momento máximo de torsión de 100 N m. Un momento de este valor se puede producir, o bien con una fuerza de 300 N aplicada sobre la punta del pie (aproximadamente a 30 cm del talón) o con una fuerza de 100 N aplicada a la punta del esquí (aproximadamente a 1 m del talón).

### III. Estudio experimental de la tracción

Estudiaremos el comportamiento de un material sometido a un ensayo elástico considerando el caso particular de la tracción, como ejemplo más sencillo. El resultado sería exactamente igual con cualquier otro ensayo elástico.

Supongamos que tenemos una barra delgada, sujeta por un extremo, y vamos aplicando por el otro extremo fuerzas sucesivamente crecientes. En una gráfica representamos para cada esfuerzo aplicado ( $F/S$ ) la deformación relativa ( $\Delta l/l$ ) producida.

Si no hay ningún esfuerzo, la barra mantiene su posición original, luego la gráfica pasará por el origen. A medida que aumenta el esfuerzo aplicado, va aumentando la deformación, de modo que el primer tramo de la gráfica es una línea recta. En esta zona se cumple la ley de Hooke, verificándose la proporcionalidad entre esfuerzo y deformación relativa. Cuanto mayor sea la pendiente de esta recta, mayor será su módulo de Young. Si, en cualquier momento de esta primera zona, vamos disminuyendo el esfuerzo, en

vez de aumentarlo, los alargamientos relativos disminuyen repitiendo los valores que habían tomado para esfuerzos crecientes: se reproduce la misma recta.

Si continuamos aumentando el valor del esfuerzo aplicado, la recta no continúa indefinidamente, sino que se alcanza un punto en el cual la gráfica se convierte en una curva muy aplanada. El punto en el cual deja de cumplirse la ley de Hooke se llama límite elástico. La primera parte de la gráfica, lineal, se denomina zona elástica, y la segunda parte, curva, zona plástica. En la zona plástica ya no hay proporcionalidad entre esfuerzo y deformación; es más, por tratarse de una curva muy aplanada, a pequeños aumentos del esfuerzo corresponden alargamientos relativos mucho mayores que en la zona elástica. Existe, además, otra diferencia con la zona elástica: si, sobrepasado el límite elástico, vamos disminuyendo el esfuerzo aplicado, no volvemos a reproducir la misma gráfica, sino que el alargamiento relativo describe una recta paralela a la original que corta al eje de abscisas en un punto distinto del origen. Esto significa que, sobrepasado el límite elástico, el cuerpo no recupera su forma original una vez cesa el esfuerzo deformador, ya que para  $F/S = 0$ ,  $\Delta l/l$  no es nulo, sino que toma cierto valor, llamado deformación residual.

Si seguimos aumentando el esfuerzo, llegamos a un punto en el cual el cuerpo se

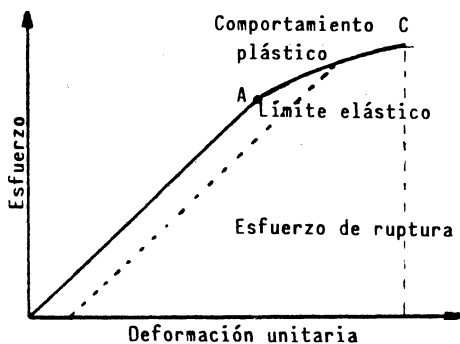


FIG. 9.— Gráfica esfuerzo-deformación relativa.

rompe. La curva acaba bruscamente. El esfuerzo correspondiente a este punto se llama carga de ruptura (fig. 9).

Esta forma de la gráfica esfuerzo deformación es típica, y se obtendría igualmente si representásemos el ángulo de torsión en función del momento del par aplicado, la disminución relativa de volumen en función de la sobrepresión, etc.

#### IV. Fibra neutra

Consideremos el caso de un material sometido a flexión. Por ejemplo, una barra, sujeta por sus dos extremos, sobre la que se ejerce una fuerza perpendicular a la misma por su punto medio. En este caso, la barra se

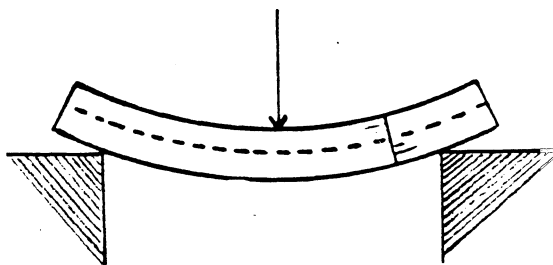


FIG. 10.— Fibra neutra en la flexión.

deforma, pero de tal modo que las fibras superiores se acortan y las inferiores se alargan (fig. 10). Existe una fibra central que no se acorta ni se alarga, y, puesto que hemos definido la fuerza elástica como la fuerza de reacción ante un agente externo. Esta fibra, que se mantiene intacta, no ejerce ninguna fuerza, se dice que «no trabaja». La fibra central, en el caso de la flexión, se llama «fibra neutra» y no va a aumentar la resistencia del cuerpo a la flexión. Por esto los cuerpos que han de estar sujetos a grandes flexiones (vigas, soportes, etc.) se construyen de modo que la masa esté distribuida de manera que la fibra neutra sea lo más delgada posible, para tener una resistencia mayor con la misma masa.

Otro ensayo elástico en el que hay que tener en cuenta la fibra neutra es el caso de la

torsión. Supongamos de nuevo un cilindro sometido a torsión (fig. 11) y en él un radio que, debido a la deformación, dará lugar a un sector circular. Las fibras más alejadas del eje experimentarán un mayor desplazamiento (un arco mayor), que los puntos intermedios.

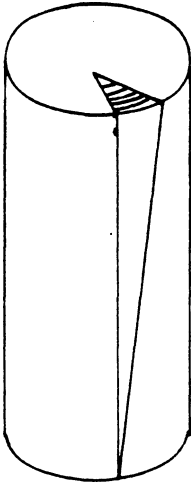


FIG. 11.— Fibra neutra en la torsión.

Los puntos situados sobre el eje no experimentarán ninguna deformación, o, dicho a la inversa, no ejercerán ninguna resistencia a la torsión. El eje del cilindro constituye la fibra neutra para la torsión. Así, dos cilindros del mismo diámetro y del mismo material, el primero hueco y el segundo macizo, presentan la misma resistencia a la torsión, con el inconveniente de que el segundo tiene mayor masa.

## V. Elasticidad ósea

Los materiales que constituyen el cuerpo humano no se pueden considerar elásticos, desde el punto de vista físico, ya que no cum-

plen la ley de Hooke. Son materiales del tipo llamado viscoelástico. Son muy deformables, pero para ellos no existe una proporcionalidad directa entre el esfuerzo aplicado y la deformación producida.

Únicamente los huesos se pueden considerar como sólidos elásticos. Para ello hemos de hacer una abstracción: considerar al hueso, aislado, pero dentro de un organismo vivo, ya que las propiedades físicas del hueso varían según forme parte de un organismo vivo o no.

El estudio de la elasticidad ósea se puede efectuar desde dos puntos de vista: en cuanto a su forma y en cuanto a su composición.

En cuanto a su forma, los huesos largos son comparables a columnas huecas (con lo cual no disminuye la resistencia a la torsión o a la flexión y son más ligeros) con dos bases o capiteles (las epífisis) que le dan mayor consistencia y resistencia a la flexión. Estas epífisis, esponjosas, contienen una serie de laminillas óseas, las trabéculas, que se disponen según las líneas de máxima carga, y contribuyen a dar más resistencia al hueso.

En lo que respecta a su composición, los huesos son un conglomerado de fibrillas de un material duro y resistente, de módulo de Young elevado, que son las sales de apatito y calcio, embebido en una matriz de colágeno, que es un material blando y deformable de módulo de Young bajo. Con esto se consigue un material cuyo módulo de Young será menor que si se tratase de sales minerales, pero que tiene la ventaja de ser menos frágil; ya que si se produce una grieta en la superficie del cristal, ésta no se propagará a todo el hueso, sino sólo a la laminilla considerada. El resultado es un material de mayor flexibilidad y deformabilidad.